Настава физике, број 12, 2023, стр 189 - 192

Како можемо "измерити" број *e* метром?

Милан С. Ковачевић

Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу

Апстракт. Један од најпознатих бројева у математици је Ојлеров број *e*. Број *e* је база природног логаритма те се често у литератури назива и Неперов број. У раду Јакова Бернулија, истакнутог математичара и физичара, број *e* се појављује као гранична вредност низа који је Бернули изучавао док се бавио питањем камата. Мада је првенствено коришћен за финасијске прорачуне, брзо је почео да се примењује у различитим наукама (физика, билогија, хемија,...). У овом раду је описан један експеримент са спојеним судовима у коме се индиректно појављује број *e*. Другим речима, у описаном експерименту можемо "иземрити" број *e* метром.

Кључне речи: закон спојених судова, број *e*, гранична вредност.

О БРОЈУ *E*

Број *e* је једна од најзначајнијих математичких константи. Познат је као Ојлеров број или Неперова константа. Иако носи Ојлерово име, овај значајн број се у математици појављује доста раније, у радовима математичара 17. века на тему логаритама. У раду Јакова Бернулија, представника истакнуте породице математичара и физичара, број *e* се појављује као гранична вредност низа који је Бернули изучавао док се бавио питањем камата. Вредност броја *e*, заокружена на десет децимала, износи e = 2,7182818285.

Строга математичка дефиниција броја *e* произилази из конвергенције низа реалних бројева, тако да број *e* представља следећу граничну вредност:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n} \qquad (1)$$

Доказ конвергентности горњег низа налазимо у уџбеницима из математике 1. Број *e* има доста занимљивих особина, од којих је неке показао управо Ојлер, те се број с правом доводи у везу са његовим именом. Познат је Ојлеров идентитет:

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \qquad (2)$$

Ова формула је једна од наславнијих у математици, јер обједињује бројеве *e*, π, 0 и 1.

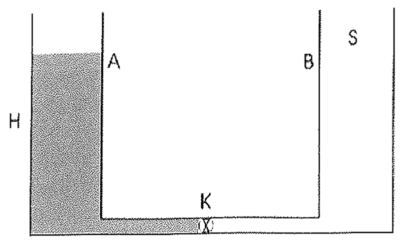
Важи и следећи идентитет:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad (3)$$

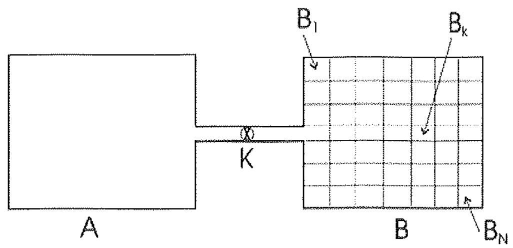
Број *e* је ирационалан број, што значи да се не може записати помоћу односа двају целих бројева, тј. број којем је децимални запис бесконачан и није периодичан. Наведимо још за крај да је, осим што је ирационалан, број *e* такође и трансцендаталан број, што значи да није корен ниједног (не нула) полинома са целобројним коефицијентима [1-3].

ЕКСПЕРИМЕНТ

На слици 1 приказана су два суда, А и В, истог попречног пресека *S*. Славином К може се отварати и затварати цев која повезује судове. У суду А налази се течност до нивоа *H*.



Слика 1.



Слика 2.

Ако отворимо славину, нивои течности у два суда ће се изједначити и висина течности ће бити

$$h = H/2 \tag{1}$$

Поставимо питање: може ли на неки начин да се постигне да течност у суду В буде на вишем нивоу него у суду А? Многи брзо одговорају да без употребе пумпе, то није могуће јер тако нешто не допушта закон спојених судова. Ипак, ево једног поступка за реализацију "немогуће" ситуације [4].

Претпоставимо да је суд В подељен вертикалном преградом на два једнака дела који се, редом, могу независно пунити течношћу из суда А. Означимо те делове са B_1 и B_2. Процес спајања судова А и B_1 доводи до нивоа h_1 који израчунавамо из релације

$$\rho S(H-h_1) = \rho \frac{S}{2} h_1 \tag{2}$$

где је ρ густина течности. Одавде добијамо висину $h_1 = 2H/3$. Сада, при изолованом делу B_1, напунимо део B_2 суда В. У суду А се спушта ниво течности у складу са релацијом

$$\rho S(h_1-h_A) = \rho \frac{S}{2} h_A \tag{3}$$

тако да одмах добијамо да је нова висина течности $h_A = 4H/9$ ($h_A=h_2$ је и висина течности у суду B_2). Затворимо сада славину К (слика 1), а уклонимо преграду из суда В. Ниво течности у суду Б ће бити $h_B = (h_1+h_2)/2$ тј.

$$h_B = 5H/9 \tag{4}$$

Пошто је у суду А, после двоструког испуштања течности, ниво остао h_2, видимо да у суду В има више течности јер је, заиста, $h_A<h_Б$. Тако смо, уз мало простих лабораторијских радњи, али без употребе пумпи, "заобишли" закон спојених судова.

Покушајмо сада да овај поступак генералишемо. Поделимо суд В не на два него да већи број једнаких делова неким вертикалним преградама, као на слици 2 (поглед одозго). Означимо са N број ћелија у суду В и означимо их редом, B_1, B_2,...,$B_к$,...,B_N. Свака ћелија сада се може спојити са судом А независно од свих других ћелија суда В. Из практичних разлога, узето је да су судови квадратног попречног пресека. Површина попречног пресека суда А је, као и В суда, *S*. Према томе површина попречног пресека суда $B_к$ једнака је *S/N*. Процес пуњења течности је исти као и онај који је описан код двокомпонентног система, једино се сада мора урадити *N* таквих операција. Ниво у компоненти $B_к$ означимо са $h_к$. Помоћу низа једначина типа (3) одмах се добија

$$h_1 = (N/(N+1))H \tag{5a}$$

$$h_2 = (N/(N+1))^2 H \tag{5b}$$

...

$$h_k = (N/(N+1))^k H \tag{5c}$$

Пошто се напуни и последњи суд B_N, у суду А преостане течности до нивоа h_A:

$$h_A = h_N = (N/(N+1))^N H \tag{6}$$

Ако на крају уклонимо мрежу преграда остаће течности у интегралном суду В на висини коју је најлакше наћи из релације

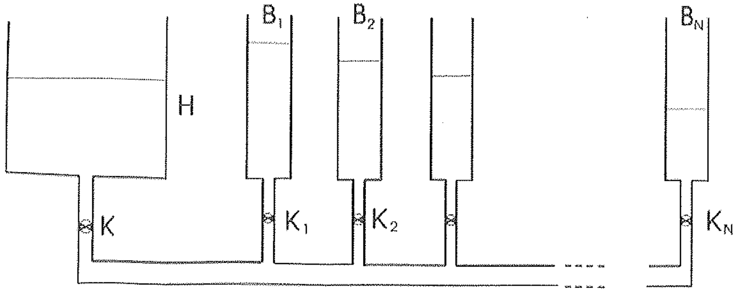
$$\rho S(H-h_A) = \rho S h_B \tag{7}$$

Одавде одмах следи $h_B = H\left(1-(N/(N+1))^N\right)$. Уведимо ознаку $e_N = (1+1/N)^N$. Помоћу ње можемо писати

$$h_A = H/e_N \tag{8}$$

$$h_B = H(1-1/e_N) \tag{9}$$

Погледајмо ближе неке конкретне примере. За *N*=10 добијамо h_A=0,3855*H* и $h_Б$=0,6144*H*. Ако је *N*=25, тада је h_A=0.3751*H* и $h_Б$=0,6249*H*. За *N*=50 налазимо h_A=0,3715*H* и $h_Б$=0,6285*H*. У ствари можемо нацртати график $h_A=f_A(N)$ и $h_Б=f_Б(N)$. Помоћу овог графика закључујемо да h_A не може бити мање од *H/e*=0,36789*H*, а $h_Б$ не може бити веће од $H(1-1/e) = 0.63292H$. Наиме, већ ученици који се приближавају крају средњошколског школовања знају да је $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x$ једнако чувеном броју *e*=2,718... На тај начин закључујемо да је разлика нивоа $h_Б$-h_A расте када узимамо све ситније поделе суда В, али да никад не можемо произвољно много смањити ниво у суду А. У лабораторији би се ова чињеница могла овако демонстрирати.



Слика 3.

Нека је на слици 3 отворена главна славина K, а отворена славина K_1. Тада се изједначавају нивои у судовима A и B_1. Онда затворимо K_1 а отворимо K_2, и тако редом, док се не отвори и задња славина K_N.

На крају, нивои у судовима A и B_N су исти и износе $\approx 0{,}368H$, ако број N није сувише мали. Другим речима у описаном експерименту можемо "измерити" број e метром. Имамо формулу

$$e = \frac{\text{ниво воде у суду на почетку опита}}{\text{ниво воде у суду на крају опита}}$$

На пример, ако је S=10cm x 10cm, и направимо N=100 судова површине 1cm x 1cm, репродуковаћемо, теоријски, број e са тачношћу 0,5%.

УМЕСТО ЗАКЉУЧКА

Наравно, треба имати у виду и капиларне појаве, које ће се сигурно јавити ако нисмо добро пројектовали пресеке и изабрали одговарајуће материјале. Ако је читаоце овај пример спојених судова заинтересовао, ево два питања за размишљање: 1) Да ли је тачно да се максимална разлика $h_Б$-$h_А$ добија за једнаку поделу површине S?, 2) Може ли се остварити нека друга занимљива подела, која ће довести до другачије граничне вредности, уместо e?

ЛИТЕРАТУРА

1. Coolidge T L, 1950, The Number e, *The American Mathematical Monthly* **57** (9) 591-602.
2. Pezer J, Matejas S, 2010/11, Brojevi *π, e, i* kroz povijest, Matematičko-fizički list 1/241, 7-14
3. Euler's number https://www.euler-2007.ch/posters/doc/Euler_and_number.pdf
4. Бабовић В, Ковачевић М, 1995, Како "оспорити" закон спојених судова?, *Физика и техника,* **25** 1–3

Настава физике, број 12, 2023, стр 193 - 196

Плазма у лабораторији

Светлана Кураица

Четврта гимназија у Београду

Апстракт. Лучно пражњење, електрични лук, је један од најтаступљенијих облика плазме који се може добити у лабараторијским условима. Електрични лук је јак извор електромагнетног зрачења у свим областима спектра. Пошто даје интензивне линије погодан је за спектроскопско истраживање. Студенти и талентовани ученици могу, у лабараторији за физику и технологију плазме, да добију плазму и да се упознају са карактеристикама лучног пражњења и уређајима који се користе за његово истраживање.

УВОД

У природи, плазма се најчешће може видети приликом атмосферског пражњења током олуја. У присуству јонизујућег зрачења долази до стварања великог броја наелектрисаних честица и тада гас постаје проводник. Ако се тај гас нађе у електричном пољу, онда ће кроз њега почети да протиче струја. Када се загреје до високих температура, он, такође, може да се јонизује. Пошто се на Земљи гасови у јонизованом стању ретко региструју, електрична пражњења у гасовима реализују се, ради изучавања, у лабораторијским условима[1].

Лучно пражњење је веома заступљен облик плазме који се може добити у лабораторији и који представља јак извор електромагнетног зрачења у свим областима спектра. Његовим проучавањем може се доћи до значајних информација о саставу плазме и физичким процесима који се у њој одигравају. Пошто се плазма примењује у многобројним процесима обраде материјала (сечење, отврдњавање, заваривање метала), третирање отпадних вода, медицинског, фармацеутског отпада , на крају, приликом истраживања контролисане фузије, њено изучавање је велики мотив за експериментални рад у студентским лабораторијама и приликом одржавања додатне наставе са талентованим ученицима.

ДОБИЈАЊЕ ПЛАЗМЕ У ЛАБОРАТОРИЈИ

Извор плазме је зидно и вртложно стабилисан лук облика латиничног слова U. Конструкција апаратуре треба да буде таква да стабилан лук плазме има довољну дужину у хоризонталном правцу да би се могла посматрати емисија спектралних линија. Лук плазме се може стабилисати позицијом електрода и системом хлађења. То се постиже на два начина: хлађењем зидова и вртложним струјањем гаса. Бакарни делови у околини лука се хладе водом. Зидови лука чврсто држе цилиндричне електроде око којих протиче чист аргон који спречава њихов контакт